黏性系数依赖于密度的可压缩磁流体方程组解的存在性*

邓慧琳[1]，阎小丽[2]
（1. 六盘水师范学院数学系，贵州 六盘水 553004；
2. 河南理工大学数学与信息科学学院，河南 焦作 454000）

摘　要：在假设初始密度 ρ_0 有界（即 $0 < m < \rho_0 < M$）的情况下，通过构造逼近解序列，利用紧致性讨论序列收敛的方法，研究了 $\mathbf{R}^N(N \geqslant 2)$ 上黏性系数依赖于密度的可压缩磁流体方程组在临界 Besov 空间中的局部解的存在性问题。

关键词：可压缩磁流体方程组；存在性；临界 Besov 空间；Bony 仿积分解
中图分类号：O175. 2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529 – 6579（2012）03 – 0044 – 08

Research of Existence for Compressible MHD Equations with Density-Dependent Viscosities

DENG Huilin[1], *YAN Xiaoli*[2]
（1. Department of Mathematics, Liupanshui Normal College, Liupanshui 553004, China;
2. School of Mathematics and Informatics, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China）

Abstract: Under the assumption that the initial density is bounded away from zero, the local existence in some critical Besov spaces for the compressible magneto-hydrodynamic equations with density-dependent viscosities in $\mathbf{R}^N(N \geqslant 2)$ is established by constructing a sequence of smooth solutions. And using a compactness argument, the convergence of the sequence is proved.

Key words: compressible magneto-hydrodynamic equations; existence; critical Besov spaces; Bony paraproduct decomposition

本文主要研究 $\mathbf{R}^N(N \geqslant 2)$ 上可压缩磁流体方程组

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mathrm{div}(2\mu(\rho)Du) - \\ \nabla(\lambda(\rho)\mathrm{div}u) + \nabla(P + \frac{1}{2}|b|^2) = b \cdot \nabla b, \\ \partial_t b + u \cdot \nabla b = b \cdot \nabla u - \mathrm{div}u \cdot b, \\ \mathrm{div}b = 0, \\ (\rho,u,b)|_{t=0} = (\rho_0,u_0,b_0) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\rho(t,x)$ 表示流体密度；$u(t,x)$ 表示流体的速度场；$b(t,x)$ 为磁场；P 为压力，是密度 $\rho(t,x)$ 的光滑函数；$Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$ 为应变张力。$\lambda(\rho),\mu(\rho)$ 是密度的光滑函数。$\lambda(\rho)$ 与 $\mu(\rho)$ 表示流体的黏性系数，且满足 $\mu > 0$ 与 $3\lambda + 2\mu > 0$。这就确保了算子 $-\mathrm{div}(2\mu(\rho)D\cdot) - \nabla(\lambda(\rho)\mathrm{div}\cdot)$ 为椭圆算子。

磁流体方程组是描述磁场与速度场相互耦合作用的模型。在物理和工程方面，有着十分广泛的应用。已经有很多数学家和物理学家，从不同的方面对磁流体方程组做了大量的研究。

* **收稿日期**：2011 – 08 – 10
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11071057）；河南省科技创新人才计划资助项目（2009HASTIT007）；六盘水师范学院青年基金资助项目（lpssy201115）
作者简介：邓慧琳（1984 年生），女，助教；E-mail：dhlhpu@163. com

比如，Gerbeau 等[1]与 Desjardins 等[2]分别在 R^3 区域和周期区域 T^3 上，证明了非齐次不可压磁流体方程组具有有限能量的弱解的整体存在性。Abidi 等[3]在 Sobolev 空间中，得到了非齐次不可压磁流体方程组的弱解的局部存在性。在运用热方程的正则效应及调和分析方法的基础上，Abidi 等[4]假设初始密度满足 $\inf_x \rho_0(t,x) > 0$，初值满足

$$a_0 \in \dot{B}^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}, u_0, b_0 \in \dot{B}^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1},$$

$$f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^+; \dot{B}^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}), Qf \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+; \dot{B}^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})$$

与 $\| a_0 \|_{\dot{B}^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}} \leqslant c$ 的情况下，得到了不可压磁流体方程组在临界 Besov 空间中整体适定性。其中 c 为一正常数，p_1, p_2 满足合适的不等式，算子 $Q = I - P$，P 是沿梯度方向到散度自由向量场的投影算子。

对于可压磁流体方程组，在初值较大且不连续时，Hu 等[5]得到了可压磁流体方程组的弱解的整体存在性结果。Lu 等[6]在允许初始密度为零的情况下，得到了带有温度的可压磁流体方程组局部强解的爆破准则：

假设 T^* 是三维可压磁流体方程组 (ρ, u, b, θ) 的最大存在空间，且 $T^* < \infty$，那么

$$\lim_{t \to T^*} (\| \nabla u \|_{L^1(0,T;L^\infty)} + \| \theta \|_{L^\infty(0,T;L^\infty)}) = \infty$$

最近边东芬等[7]通过构造逼近解序列，分别得到了无黏性可压磁流体方程组在超临界 Besov 空间 $\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}(s > 1 + \frac{N}{p}$ 或 $s = 1 + \frac{N}{p}, r = 1)$ 中局部解的适定性与带有黏性的可压缩磁流体方程组在临界 Besov 空间 $\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}$ 中的局部解的适定性。Danchin[8-10]与 Haspot[11]也在临界 Besov 空间中，给出了一些有关可压缩 Navier-Stokes 方程的局部适定性结果。Chen 等[12]在临界 $\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}$ 中，证明了黏性系数依赖于密度的 Navier-Stokes 方程局部解的适定性。本文的主要目标是在 Besov 空间 $\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}$ 中，通过构造逼近解序列，得到黏性系数依赖于密度的可压缩磁流体方程组（1）解的存在性。

为了更好的说明临界空间的概念，引入如下伸缩变换：对 $\forall l \in \mathbf{R}$，定义

$$\rho_l(t,x) = \rho(l^2 t, lx), u_l(t,x) = lu(l^2 t, lx),$$

$$b_l(t,x) = lb(l^2 t, lx), P_l(t,x) = l^2 P(l^2 t, lx)$$

易知若 (ρ, u, b) 是方程组（1）的解，则 (ρ_l, u_l, b_l) 也满足方程组（1）。对于可压缩磁流体方程组（1），设 X 为一个函数空间。若通过上述变换，其范数保持不变，则称 X 为一个临界空间。$\dot{H}^{\frac{N}{2}-1}$ 是一个临界空间。Fujita 等[13]在 Sobolev 空间 $\dot{H}^{\frac{N}{2}-1}$ 中证明了 Navier-Stokes 方程的适定性。因此，我们首先想到的时齐次 Sobolev 空间 $\dot{H}^{\frac{N}{2}-1}$，使得方程组（1）的初值 $(\rho_0, u_0, b_0) \in \dot{H}^{\frac{N}{2}} \times \dot{H}^{\frac{N}{2}-1} \times (\dot{H}^{\frac{N}{2}-1} \cap \dot{H}^{\frac{N}{2}})$. 但是，当密度 ρ 为零或变得无限大时会导致方程组（1）的退化。所以，必须进一步假设 ρ_0，$\rho_0^{-1} \in L^\infty$。然而 $\dot{H}^{\frac{N}{2}}$ 不能连续嵌入到 L^∞。为此，我们选择一个稍微小一点的临界空间 $\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}$，使得对于常数 $\overline{\rho_0} > 0$，有 $(\rho_0 - \overline{\rho_0}) \in \dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}, u_0 \in \dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}, b_0 \in \dot{B}^{\frac{N}{p}-1}_{p,1} \cap \dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}$，进而研究方程组（1）的解的存在性。

不失一般性，我们假设 $\overline{\rho_0} = 1$，对方程组（1）作如下变换：$a(t,x) = \frac{1}{\rho(t,x)} - 1$，

$\bar{\mu}(\rho) = \frac{\mu(\rho)}{\rho}, \bar{\lambda}(\rho) = \frac{\lambda(\rho)}{\rho}$，则方程组（1）变为

$$\begin{cases} \partial_t a + u \cdot \nabla a = (1 + a)\mathrm{div}u, \\ \partial_t u + \mathrm{div}(\bar{\mu} \nabla u) - \nabla(\bar{\lambda} + \bar{\mu})\mathrm{div}u = G + M, \\ \partial_t b + u \cdot \nabla b = b \cdot \nabla u - \mathrm{div}u \cdot b, \\ \mathrm{div}b = 0, \\ (a, u, b)|_{t=0} = (a_0, u_0, b_0), \end{cases} \tag{2}$$

$G = - u \cdot \nabla u - \frac{\nabla P(\rho)}{\rho} + \frac{\mu(\rho)}{\rho^2} \nabla \rho \cdot \nabla u + \frac{\mu(\rho) + \lambda(\rho)}{\rho^2} \nabla \rho \mathrm{div}u, M = (1 + a)(b \cdot \nabla b - \nabla b \cdot b)$

对于可压缩磁流体方程组（2），我们得到的主要结果如下：

定理 1　假设初值 $a_0 \in \dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}, u_0 \in \dot{B}^{\frac{N}{p}-1}_{p,1}, b_0 \in \dot{B}^{\frac{N}{p}-1}_{p,1} \cap \dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}$，令 $p \in (1, N]$ 那么存在一个正的时刻 T 使得方程组（2）有解 $(a, u, b) \in E^p_T$，其中

$$E^p_T = C([O,T]; \dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}) \times (C([O,T]; \dot{B}^{\frac{N}{p}-1}_{p,1}) \cap L^1(O,T; \dot{B}^{\frac{N}{p}+1}_{p,1}))^N \times (C[O,T]; \dot{B}^{\frac{N}{p}-1}_{p,1} \cap \dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1})^N$$

1　Littlewood-Paley 理论及 Besov 空间

首先介绍 Littlewood-Paley 理论。令 $S(\mathbf{R}^n)$ 表示 Schwarz 速降函数族，选择一个光滑的非负径向函数 $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$，使得 $\mathrm{supp}\varphi = \{\xi \in \mathbf{R}^n, \frac{3}{4} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{8}{3}\}$，并且满足对任意的 $\xi \in \mathbf{R}^n$，

$\chi(\xi) + \sum_{j \geqslant 0} \varphi(2^{-j}\xi) = 1$，对任意的 $\xi \in$

$\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$，$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\varphi(2^{-j}\xi)=1$。定义频率局部化算子 $(\Delta_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ 与 $(S_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ 如下：

$$\Delta_j u=\varphi(2^{-j}D)u,\forall j\in\mathbf{Z},S_j u=\sum_{k\leqslant j-1}\Delta_k u,\forall j\in\mathbf{Z}$$

对于任意的函数 $u\in S'(\mathbf{R}^n)/P[\mathbf{R}^n]$ 有 Littlewood-Paley 分解，$u=\sum_{j\in\mathbf{Z}}\Delta_j u$。其中 $S'(\mathbf{R}^n)$ 为 $S(\mathbf{R}^n)$ 的对偶空间，$P[\mathbf{R}^n]$ 为一个多项式集合。对于 $u\in S(\mathbf{R}^n)$，易知当 $|j-k|\geqslant 2$ 时，$\Delta_j\Delta_k u=0$；当 $|j-k|\geqslant 5$ 时，$\Delta_j(S_{k-1}\Delta_k u)=0$。

接下来，为证明本文的结论，我们回顾权函数及加权的 Besov 空间[1]。首先定义权函数。设 $\{e_k(t)\}_{k\in\mathbf{N}}$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的一个连续函数序列，满足 $e_k(t)\in[0,1]$ 且

$$\begin{cases}e_k(t)\leqslant e_{k'}(t),k\leqslant k',\\ e_k(t)\sim e_{k'}(t),k\sim k'\end{cases}\tag{3}$$

定义 $w_k(t)=\sum_{k\leqslant l}2^{k-l}e_l(t),k\in\mathbf{Z}$ 为一个权函数。经简单运算，可知对于 $\forall k\in\mathbf{Z}$，有

$$\text{(i) } w_k(t)\leqslant 2,e_k(t)\leqslant w_k(t);\text{(ii) } k\geqslant k',w_k(t)\leqslant 2^{k-k'}w_{k'}(t);\\ \text{(iii) } k\leqslant k',w_k(t)\leqslant 3w_{k'}(t);\text{(iv) } k\sim k',w_k(t)\sim w_{k'}(t)\tag{4}$$

定义 1[12] 令 $s\in\mathbf{R},1\leqslant p,r\leqslant+\infty,T\in(0,\infty)$。定义加权 Besov 空间为

$$\dot{B}^s_{p,r}(w)=\{f\in S'(\mathbf{R}^n);\|f\|_{\dot{B}^s_{p,r}(w)}<+\infty\}$$

其中 $\|f\|_{\dot{B}^s_{p,r}(w)}=\|2^{ks}w_k(T)\|\Delta_k f\|_{L^p}\|_{l^r}$ 为 f 在加权 Besov 空间中的范数。

定义 2[12] 令 $s\in\mathbf{R},1\leqslant p,r\leqslant+\infty,T\in(0,\infty)$。定义加权的时空空间为

$$\tilde{L}^q_t(\dot{B}^s_{p,1}(w))=\{f\in L^q_t(\dot{B}^s_{p,1}(w));\\ \|f\|_{\tilde{L}^q_t(\dot{B}^s_{p,1}(w))}<+\infty\}$$

其中 $\|f\|_{\tilde{L}^q_t(\dot{B}^s_{p,1}(w))}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{ks}w_k(t)(\int_0^T\|\Delta_k f\|^q_p\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}$。

为了证明本文的结论，给出以下引理：

引理 1[12,14-15] （Bernstein 不等式）设 $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty,0<r<\mathbf{R}$。若 $f\in L^P(\mathbf{R}^n)$，则存在常数 $C,C_k>0$，使得对于 $\forall k\in\mathbf{N},\lambda>0$ 有如下不等式

$$\operatorname{supp}\hat{f}\subseteq\{\xi:|\xi|\leqslant\lambda r\}\Rightarrow$$

$$\sup_{|\beta|=k}\|\partial^\beta f\|_{L^q}\leqslant C\lambda^{k+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_{L^p}$$

引理 2[12] 设 $k\in\mathbf{Z},f\in\tilde{L}^\infty_T(\dot{B}^s_{p,1})$。若 $e_k(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是连续的，并且 $e_k(0)=0$。则对于 $\forall\varepsilon>0$，存在一个时刻 $T_1\in(0,T]$，有 $\|f\|_{\tilde{L}^\infty_T(\dot{B}^s_{p,1})}\leqslant\varepsilon$。

引理 3 设 $s>0,p\in[1,+\infty]$。若 $f,g\in\dot{B}^s_{p,1}\cap L^\infty$，那么有

$$\|fg\|_{\dot{B}^s_{p,1}}\leqslant C(\|f\|_{\dot{B}^s_{p,1}}\|g\|_{L^\infty}+\|g\|_{\dot{B}^s_{p,1}}\|f\|_{L^\infty})$$

引理 4 设 $s_1,s_2\leqslant\frac{N}{p},s_1+s_2>N\max(0,\frac{2}{p}-1),(p,q,q_1,q_2)\in[1,+\infty]^4$，且 $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$。若 $f\in\tilde{L}^{q_1}_T(\dot{B}^{s_1}_{p,1}),g\in\tilde{L}^{q_2}_T(\dot{B}^{s_2}_{p,1})$，则有

$$\|fg\|_{\tilde{L}^q_T(\dot{B}^{s_1+s_2-\frac{N}{p}}_{p,\infty})}\leqslant C\|f\|_{\tilde{L}^{q_1}_T(\dot{B}^{s_1}_{p,1})}\|g\|_{\tilde{L}^{q_2}_T(\dot{B}^{s_2}_{p,1})}$$

引理 5 设 $s_1\leqslant\frac{N}{p},s_2<\frac{N}{p},s_1+s_2\geqslant N\max(0,\frac{2}{p}-1),(p,q,q_1,q_2)\in[1,+\infty]^4$，且 $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$。若 $f\in\tilde{L}^{q_1}_T(\dot{B}^{s_1}_{p,1}),g\in\tilde{L}^{q_2}_T(\dot{B}^{s_2}_{p,1})$，则有

$$\|fg\|_{\tilde{L}^q_T(\dot{B}^{s_1+s_2-\frac{N}{p}}_{p,\infty})}\leqslant C\|f\|_{\tilde{L}^{q_1}_T(\dot{B}^{s_1}_{p,1})}\|g\|_{\tilde{L}^{q_2}_T(\dot{B}^{s_2}_{p,\infty})}$$

引理 6 设 $s>0,(p,q)\in[1,+\infty]^2$。假设 $F\in W^{[s]+3,\infty}_{loc}(\mathbf{R})$ 且 $F(0)=0$。那么对于 $\forall f\in L^\infty_T(L^\infty)\cap\tilde{L}^q_T(\dot{B}^s_{p,1})$，有

$$\|F(f)\|_{\tilde{L}^q_T(\dot{B}^s_{p,1})}\leqslant C(1+\|f\|_{L^\infty_T(L^\infty)})^{[s]+2}\|f\|_{\tilde{L}^q_T(\dot{B}^s_{p,1})}$$

引理 7 设 $s\in(-\frac{N}{p},\frac{N}{p}),1\leqslant p\leqslant\infty$。如果 $F\in W^{[s]+3,\infty}_{loc}(\mathbf{R})$ 且 $G'(0)=0,u-v\in\dot{B}^s_{p,\infty}$，那么对于 $u,v\in\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}$，有

$$\|G(u)-G(v)\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}}\leqslant C(\|u\|_{\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}}+\|v\|_{\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}})\|u-v\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}}$$

引理 8[12] 设

$$s_1\leqslant\frac{N}{p}-1,s_2<\frac{N}{p},s_1+s_2\geqslant N\max(0,\frac{2}{p}-1),$$

$(p,q,q_1,q_2)\in[1,+\infty]^4$ 且 $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$。若 $f\in\tilde{L}^{q_1}_T(\dot{B}^{s_1}_{p,1}(w)),g\in\tilde{L}^{q_2}_T(\dot{B}^{s_2}_{p,1})$，则有

$$\|fg\|_{\tilde{L}^q_T(\dot{B}^{s_1+s_2-\frac{N}{p}}_{p,1}(w))}\leqslant C\|f\|_{\tilde{L}^{q_1}_T(\dot{B}^{s_1}_{p,1}(w))}\|g\|_{\tilde{L}^{q_2}_T(\dot{B}^{s_2}_{p,1})}$$

引理 9[12] 设 $s_1\leqslant\frac{N}{p}-1,s_2<\frac{N}{p},s_1+s_2\geqslant N\max(0,\frac{2}{p}-1),(p,q,q_1,q_2)\in[1,+\infty]^4$ 且 $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$。若 $f\in\tilde{L}^{q_1}_T(\dot{B}^{s_1}_{p,1}(w)),g\in\tilde{L}^{q_2}_T(\dot{B}^{s_2}_{p,\infty})$，则有

$$\|fg\|_{\tilde{L}^q_T(\dot{B}^{s_1+s_2-\frac{N}{p}}_{p,1}(w))}\leqslant C\|f\|_{\tilde{L}^{q_1}_T(\dot{B}^{s_1}_{p,1}(w))}\|g\|_{\tilde{L}^{q_2}_T(\dot{B}^{s_2}_{p,\infty})}$$

引理 10 设 $s>0,(p,q)\in[1,+\infty]^2$。如果 $F\in W^{[s]+3,\infty}_{loc}(\mathbf{R})$ 且 $F(0)=0$，那么对于 $\forall f\in L^\infty_T(L^\infty)\cap\tilde{L}^q_T(\dot{B}^s_{p,1}(w))$，有

$$\|F(f)\|_{\tilde{L}^q_T(\dot{B}^s_{p,1}(w))}\leqslant C(1+\|f\|_{L^\infty_T(L^\infty)})^{[s]+2}\|f\|_{\tilde{L}^q_T(\dot{B}^s_{p,1}(w))}$$

注 应用 Bony 仿积分解[16]与 Bernstein 不等式，易得引理 3 – 7 的证明，证明参阅文［8,17］。

2　关于线性输运方程的先验估计

首先回顾如下线性输运方程在 Besov 空间中的标准估计：

$$\begin{cases}\partial_t f + u \cdot \nabla f = g, \\ f|_{t=0} = f_0\end{cases} \tag{5}$$

命题 1[10,18]　设 $s \in (-N\min(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}), 1 + \frac{N}{p}), (p,r) \in [1, +\infty]^2$。假设 $g \in \dot{B}^s_{p,r}$，u 是一个向量场，并且 $\nabla u \in L^1_T(\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,r} \cap L^\infty)$。再假设 f 为输运方程（5）的一个解，且初值 $f_0 \in \dot{B}^s_{p,r}$。那么，对任意 $t \in [0,T]$，有如下估计成立：

$$\|f\|_{\tilde{L}^\infty_t(\dot{B}^s_{p,1}(w))} \leqslant e^{CU(t)}(\|f_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}} + \int_0^t e^{-CU(t)} \|g\|_{\dot{B}^s_{p,1}(w)} d\tau)$$

其中 $U(t) = \int_0^t \|\nabla u\|_{\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,r} \cap L^\infty} d\tau$。若 $r < +\infty$，则 $f \in C([0,T]; \dot{B}^s_{p,r})$。

接下来考虑如下输运方程

$$\begin{cases}\partial_t a + u \cdot \nabla a = (1 + a)\mathrm{div}u, \\ a|_{t=0} = a_0\end{cases} \tag{6}$$

并给出其先验估计。

命题 2　$s \in (-N\min(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}), 1 + \frac{N}{p}), p \in [1, +\infty]$。假设 u 是一个向量场，并且 $\nabla u \in L^1_T(\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1})$。再假设 a 为输运方程（6）的一个解，且初值 $a_0 \in \dot{B}^s_{p,1}$。那么，对任意 $t \in [0,T]$，令 $U(t) = \int_0^t \|\nabla u\|_{\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1}} d\tau$，有

$$\|a\|_{\tilde{L}^\infty_T(\dot{B}^S_{P,1})} \leqslant e^{CU(t)} \|a_0\|_{\dot{B}^S_{P,1}} + e^{CU(t)} - 1 \tag{7}$$

$$\|a\|_{\tilde{L}^\infty_T(\dot{B}^S_{P,1}(w))} \leqslant \|a_0\|_{\dot{B}^S_{P,1}(w)} + C(1 + \|a\|_{\tilde{L}^\infty_T(\dot{B}^S_{P,1})}) \|u\|_{\tilde{L}^1_T(\dot{B}^{\frac{N}{p}+1}_{P,1})} \tag{8}$$

为证明命题 2，我们先给出如下引理：

引理 11[12]　设 $p \in [1, +\infty]$。假设 $f \in \dot{B}^{s_1}_{p,1}(w), g \in \dot{B}^{s_2}_{p,1}$。那么有

（i）若 $s_2 \leqslant \frac{N}{p}$，则 $\|T_g f\|_{\dot{B}^{S_1+S_2-\frac{N}{p}}_{P,1}(w)} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,1}(w)} \|g\|_{\dot{B}^{s_2}_{p,1}}$；

（ii）若 $s_1 \leqslant \frac{N}{p} - 1$，则 $\|T_f g\|_{\dot{B}^{S_1+S_2-\frac{N}{p}}_{P,1}(w)} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,1}(w)} \|g\|_{\dot{B}^{s_2}_{p,1}}$；

（iii）$s_1 + s_2 > N\max(0, \frac{2}{p} - 1)$，则

$$\|R(f,g)\|_{\dot{B}^{S_1+S_2-\frac{N}{p}}_{P,1}(w)} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,1}(w)} \|g\|_{\dot{B}^{s_2}_{p,1}}$$

引理 12　设 $s \in (-N\min(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}), 1 + \frac{N}{p}), p \in [1, +\infty]$。假设 $u \in \dot{B}^{\frac{N}{p}+1}_{p,1}, f \in \dot{B}^s_{p,1}(w)$，

$$\sum_j w_j(T) 2^{js} \|[u \cdot \nabla, \Delta_j] f\|_{L^p} \leqslant C\|u\|_{\dot{B}^{\frac{N}{P}+1}_{p,1}} \|f\|_{\dot{B}^S_{P,1}(w)}$$

应用 Bony 仿积分解与引理 2，易得引理 12 的证明。其证明过程类似于文［12］中引理 4.3 的证明。命题 2 的证明：（7）式的证明请参看文［11］。这里我们只给出（8）式的证明。

假设 $p < +\infty$，对输运方程（6）的两边同时应用算子 Δ_j，得到

$$\partial_t \Delta_j a + u \cdot \nabla \Delta_j a = [u \cdot \nabla, \Delta_j] a - \Delta_j((1 + a)\mathrm{div}u)$$

对上式的两边同时乘以 $|\Delta_j a|^{p-2} \Delta_j a$，关于 x 和 t 积分，利用分部积分，有

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|\Delta_j a\|_p^p - \frac{1}{p} \int_{\mathbf{R}^N} |\Delta_j a|^p \mathrm{div}u dx \leqslant C(\|[u \cdot \nabla, \Delta_j] a\|_p + \|\Delta_j((1 + a)\mathrm{div}u)\|_p) \|\Delta_j a\|_p^{p-1} \cdot$$

$$\|\Delta_j a\|_p \leqslant \|\Delta_j a_0\|_p + \int_0^t (\frac{1}{p} \|\Delta_j a)\|_p \|\mathrm{div}u\|_{L^\infty} + \|[u \cdot \nabla, \Delta_j] a\|_p + \|\Delta_j((1 + a)\mathrm{div}u)\|_p) d\tau \tag{9}$$

对（9）式不等式右边应用嵌入关系 $\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,1} \to L^\infty$ 与引理 12 可得

$$\|a\|_{\tilde{L}^\infty_T(\dot{B}^S_{P,1}(w))} \leqslant \|a_0\|_{\dot{B}^S_{P,1}(w)} + C\int_0^t (\|a\|_{\dot{B}^S_{P,1}(w)} \|u\|_{\dot{B}^{\frac{N}{p}+1}_{P,1}} + \|(1 + a)\mathrm{div}u\|_{\dot{B}^S_{P,1}(w)}) d\tau \tag{10}$$

由权函数的性质（6）的（i）与加权 Besov 空间的定义，可知

$$\|a\|_{\dot{B}^S_{P,1}(w)} \leqslant 2\|a_0\|_{\dot{B}^S_{P,1}} \tag{11}$$

$$\|(1 + a)\mathrm{div}u\|_{\dot{B}^S_{P,1}(w)} \leqslant 2\|(1 + a)\mathrm{div}u\|_{\dot{B}^S_{P,1}} \leqslant C(1 + \|a\|_{\dot{B}^S_{P,1}}) \|u\|_{\dot{B}^{\frac{N}{p}+1}_{P,1}} \tag{12}$$

将（11）式、（12）式合并到（10）式，有

$$\|a\|_{\tilde{L}^\infty_T(\dot{B}^S_{P,1}(w))} \leqslant \|a_0\|_{\dot{B}^S_{P,1}(w)} + C(1 + \|a\|_{\tilde{L}^\infty_T(\dot{B}^S_{P,1})}) \|u\|_{L^1_T(\dot{B}^{\frac{N}{p}+1}_{P,1})}$$

下面给出如下磁场方程的的先验估计

$$\begin{cases}\partial_t b + u \cdot \nabla b = b \cdot \nabla u - \mathrm{div}u \cdot b, \\ \mathrm{div}b = 0, \\ b|_{t=0} = b_0\end{cases} \tag{13}$$

命题 3　设 $s \in (-N\min(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}), 1 + \frac{N}{p}), p \in [1, +\infty]$。假设 u 是一个向量场，并且 $\nabla u \in$

$L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})$。假设 b 为磁场方程（13）的一个解，且初值 $b_0 \in \dot{B}_{p,1}^s$。那么，对任意 $t \in [0,T]$，令 $U(t) = \int_0^t \|\nabla u\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} d\tau$。有

$$\|b\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{P,1}^S)} \leqslant e^{CU(t)} \|b_0\|_{\dot{B}_{P,1}^S}$$

证明 由命题 2 知

$$\|b\|_{\tilde{L}_{Tt}^\infty(\dot{B}_{p,1}^s)} \leqslant e^{CU(t)} \cdot$$
$$(\|b_0\|_{\dot{B}_{p,r}^s} + \int_0^t e^{-CU(t)} \|b \cdot \nabla u - \mathrm{div}u \cdot b\|_{\dot{B}_{p,1}^s} d\tau)$$

对右边第二项应用引理 1，有

$$\|b\|_{\tilde{L}_{Tt}^\infty(\dot{B}_{p,1}^s)} \leqslant e^{CU(t)} \cdot$$
$$(\|b_0\|_{\dot{B}_{p,r}^s} + \int_0^t e^{-CU(t)} \|b\|_{\dot{B}_{p,1}^s} \|\nabla u\|_{\dot{B}_{P,1}^{\frac{N}{P}}} d\tau)$$

最后，由 Gronwall 引理，可得

$$\|b\|_{\tilde{L}_{Tt}^\infty(\dot{B}_{p,1}^s)} \leqslant e^{CU(t)} \|b_0\|_{\dot{B}_{p,1}^s}$$

3 线性动量方程的先验估计

考虑动量方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \mathrm{div}(\bar{\mu}\nabla u) - \nabla(\bar{\lambda} + \bar{\mu}\mathrm{div}u) = G + M, \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{14}$$

在下文中，假设黏性系数 $\bar{\lambda}(\rho)$，$\bar{\mu}(\rho)$ 是 ρ 的光滑函数，并且存在正常数 c_1，使得 $\bar{\mu} \geqslant c_1$ 与 $\bar{\lambda} + 2\bar{\mu} \geqslant c_1$。我们选取权函数 $w_k(t) = \sum_{k \leqslant l} 2^{k-l} e_l(t)$，其中 $e_l(t) = (1 - e^{-c2^{2l}t})^{\frac{1}{2}}$。容易验证，$e_l(t)$ 满足性质（3）。

命题 4[12] 设 $q \in [1, +\infty]$，假设 $G + M \leqslant L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s-1})$，$\rho - \underline{\rho} \in L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})$，$u_0 \in \dot{B}_{p,1}^{s-1}$。$u$ 为方程组（14）的解。令 $A(T) = (1 + \|\rho\|_{L_T^\infty(L^\infty)})^{[\frac{N}{p}]+2}$，那么

（i）$s \in (-N\min(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}) + 1, \frac{N}{p}]$，$p \in [1,N]$，则有

$$\|u\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^{s-1+\frac{2}{q}})} \leqslant C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{s-1}} +$$
$$\|G(\tau) + M(\tau)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s-1})} +$$
$$A(T)\|\rho - \underline{\rho}\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s+1})})$$

若 $\rho - \underline{\rho} \in L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})$，$s \in (-N\min(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}) + 1, 1 + \frac{N}{p}]$，$p \in (1,\infty)$，则有

$$\|u\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^{s-1+\frac{2}{q}})} \leqslant$$
$$C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{s-1}} + \|G(\tau) + M(\tau)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s-1})} +$$
$$A(T)\|\rho - \underline{\rho}\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}^{\frac{N}{p}+1})_{p,1}} \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s+1})})$$

（ii）$s \in (-N\min(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}) + 1, \frac{N}{p}]$，$p \in [1,N]$，则有

$$\|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}^{s+1})_{p,1}} + \|u\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^s)} \leqslant$$
$$C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{s-1}} + \|G(\tau) + M(\tau)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s-1}(w))} +$$
$$A(T)\|\rho - \underline{\rho}\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(w))} \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}^{s+1})_{p,1}})$$

命题 5[12] 设 $q \in (2, +\infty]$，假设 $G + M \leqslant L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{-\frac{N}{p}})$，$\rho - \underline{\rho} \in L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})$，$u_0 \in \dot{B}_{p,\infty}^{s-1}$。$u$ 为方程组（14）的解。令 $A(T) = (1 + \|\rho\|_{L_T^\infty(L^\infty)})^{[\frac{N}{p}]+2}$，那么有如下不等式成立：

$$\|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\frac{N}{p}})} + \|u\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{1-\frac{N}{p}})} \leqslant$$
$$C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{N}{p}}(w)} + \|G(\tau) + M(\tau)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{-\frac{N}{p}}(w))} +$$
$$A(T)\|\rho - \bar{\rho}\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{-\frac{N}{p}}(w))} \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\frac{N}{p}})})$$

4 解的存在性

本节我们给出磁流体方程组（2）解的存在性证明。具体思路为：

（i）光滑化初值，在 $[0,T_n]$ 上得到具有光滑初值的解序列 $(a^n, u^n, b^n)_{n\in\mathbf{N}}$；

（ii）对任意 $t \in (0,T_n)$，给出并证明有关解序列 $(a^n, u^n, b^n)_{n\in\mathbf{N}}$ 的一致估计；

（iii）利用紧致性的讨论方法，证明解序列 $(a_0^n, u_0^n, b_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ 收敛到磁流体方程组（2）的一个解 (a,u,b)。

第一步：光滑初值、构造逼近解序列。

光滑初值 (a_0, u_0, b_0) 为 $a_0^n = S_n a_0$，$u_0^n = S_n u_0$，$b_0^n = S_n b_0$。采用标准的线性化方法（可参考文[8]中定理 4.2），可以得到：初值为 $(a_0^n, u_0^n, b_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ 的磁流体方程组（2）在 $[0,T_n]$ 上有唯一解 $(a^n, u^n, b^n)_{n\in\mathbf{N}}$ 且满足：

$$a^n \in C([0,T_n]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1});$$
$$b^n \in C([0,T_n]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1});$$
$$u^n \in C([0,T_n]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1}) \cap L^1([0,T_n]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2})$$

第二步：一致估计。

令 T_n 为解 $(a_0^n, u_0^n, b_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ 的最大存在时间。设 $T \in (0,T_n)$，记 $U_0 = \|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{P}-1}}$，$B_0 = 2\|b_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{P}-1}}$，$H_0 = 2\|b_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{P}}}$，$A_0 = 2\|a_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{P}+1}}$。假定对于某些正常数 C_0，η 有如下式子成立：

（A1）$\bar{\mu}(t,x) \geqslant c_1$，$\bar{\lambda}(t,x) + \bar{\mu}(t,x) \geqslant c_1$，对于 $\forall t \in [0,T] \times \mathbf{R}^N$；

（A2）$\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{P,1}^{\frac{N}{P}})} \leqslant A_0$，$\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{P,1}^{\frac{N}{P}}(w))} \leqslant A_1\eta$；

（A3）$\|b^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant B_0$，$\|b^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \leqslant H_0$；

（A4）$\|u^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C_0U_0$，$\|u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + \|u^n\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \leqslant \eta$。

接下来，我们将证明在对 T,η 做适当的假设条件下，若（A1）-（A4）不等式成立，则（A1）-（A4）严格不等式成立。又因为（A1）-（A4）是连续依赖于时间变量并且对初值也成立，由标准的逐步提升讨论法，即可得对任意的 T 都有（A1）-（A4）成立。首先，考虑磁流体方程组（2）的输运方程与磁场方程，令 $U^n(t)=\int_0^t \|u^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1}}\mathrm{d}\tau$，由命题 2 与命题 3，可得

$$\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \leqslant \mathrm{e}^{CU(t)}\|a_0^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \mathrm{e}^{CU^n(t)} - 1 \leqslant \mathrm{e}^{CU(t)}\|a_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \mathrm{e}^{CU(t)} - 1 \tag{15}$$

$$\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^s)} \leqslant \|a_0^n\|_{\dot{B}_{p,1}^s(w)} + C(1 + \|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^s(w))})\|u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} \tag{16}$$

$$\|b^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \leqslant \mathrm{e}^{CU^n(t)}\|b_0^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \leqslant \mathrm{e}^{CU^n(t)}\|b_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \tag{17}$$

$$\|b^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant \mathrm{e}^{CU^n(t)}\|b_0^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}} \tag{18}$$

根据（A3）式，可以选择足够小的 η 使得

$$\mathrm{e}^{CU^n(t)} \leqslant 2 \tag{19}$$

把（19）式代入（15）、（17）、（18）式中，有

$$\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} < 2\|a_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + 1 = A_0 \tag{20}$$

$$\|b^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} < 2\|b_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}} = B_0 \tag{21}$$

$$\|b^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \leqslant 2\|b_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} = H_0 \tag{22}$$

结合（20）、（16）、（A3）式，有

$$\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^s(w))} \leqslant \|a_0\|_{\dot{B}_{p,1}^s(w)} + C(1 + A_0)\eta \tag{23}$$

利用权函数的连续性质及 $w_k(0) = 0$，对于足够小的 T，能够做到

$$\|a_0^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} \leqslant \frac{A_1}{3}\eta \tag{24}$$

令 $A_1 = 3C(1 + A_0)$，结合（23）、（24）式，则有

$$\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(w))} \leqslant \frac{2}{3}A_1\eta < A_1\eta \tag{25}$$

其次，考虑磁流体方程组（2）的动量方程，由命题 3，可得

$$\|u\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \leqslant C\|u_0^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}} + C\|G^n(\tau) + M^n(\tau)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + C\left(1 + \|a^n\|_{L_T^\infty(L^\infty)}\right)^{[\frac{N}{p}]+2} \cdot \|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} \tag{26}$$

通过引理 4、引理 6 及嵌入关系 $\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}} \to L^\infty$，可得如下估计

$$\|(1 + a^n)(b^n \cdot \nabla b^n - \nabla b^n \cdot b^n)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C\|1+ a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|(1+ a^n)(b^n\cdot\nabla b^n-\nabla b^n\cdot b^n)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})}\leqslant C\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|b^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|\nabla b^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|b^n\|^2_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}T \tag{27}$$

$$\|u^n \cdot \nabla u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C\|u^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \cdot \|\nabla u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \leqslant C\|u^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})}\|u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} \tag{28}$$

$$\|(1 + a^n)\nabla P(\rho^n)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C\|\nabla P(\rho^n)\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})}(1 + \|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})})T \leqslant C\|P(\rho^n)\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}(1 + \|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})})T \leqslant C\left(1 + \|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\right)^{[\frac{N}{p}]+3}\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}T \tag{29}$$

$$\left\|\frac{\mu(\rho^n)}{(\rho^n)^2}\nabla\rho^n \cdot\nabla u^n\right\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})}\leqslant C\left(1 +\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\right)^{[\frac{N}{p}]+3}\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} \tag{30}$$

$$\left\|\frac{\mu(\rho^n) + \lambda(\rho^n)}{(\rho^n)^2}\nabla\rho^u\mathrm{div}u^n\right\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C\left(1 + \|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\right)^{[\frac{N}{p}]+3} \cdot \|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} \tag{31}$$

由（27）-（31）式，可知

$$\|G^n(\tau) + M^n(\tau)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C\left(1 + \|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\right)^{[\frac{N}{p}]+3} \cdot \|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}(T + \|u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}) + C\|u^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})}\|u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + C\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|b^n\|^2_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}{}^T \tag{32}$$

把（32）式代入（26）式，可得

$$\|u^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C_1\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}} + C_1\left(1 + \|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\right)^{[\frac{N}{p}]+3} \cdot \|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}(T + \|u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}) + C_1\|u^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})}\|u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + C_1\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|b^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}{}^2T$$

令 $C_0 = 3C_1$，由（A2）式，可知，$(1 + \|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})})^{[\frac{N}{p}]+3} \leqslant (1 + A_0)^{[\frac{N}{p}]+3}$，选取足够小

的 T,η，有

$$C_1(1+A_0)^{[\frac{N}{p}]+3}A_0\eta < \frac{1}{6}C_0U_0;$$

$$C_1(1+A_0)^{[\frac{N}{p}]+3}A_0T < \frac{1}{6}C_0U_0;$$

$$C_1C_0U_0\eta < \frac{1}{6}C_0U_0;C_1A_0TH_0^2 < \frac{1}{6}C_0U_0 \quad (33)$$

由此可得

$$\|u^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C_1(U_0+(1+A_0)^{[\frac{N}{p}]+3} A_0(\eta+T)+C_0U_0\eta)+C_1A_0TH_0^2 \leqslant C_0U_0 \quad (34)$$

由命题 3 及引理 1 可得

$$\|u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}+\|u^n\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \leqslant C_2\{\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}}+\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|b^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}^2T+ \|u^n\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}^2+(1+\|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})})^{[\frac{N}{p}]+3}\cdot \|a^n\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}(T+\|u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})})\} \quad (35)$$

利用（A2）式，选取足够小的 T,η，使得

$$\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}} < \frac{\eta}{6C_2};C_2A_0TH_0^2 < \frac{1}{6}\eta;$$

$$A_1C_2(1+A_0)^{[\frac{N}{p}]+3}\eta < \frac{1}{6};$$

$$A_1C_2(1+A_0)^{[\frac{N}{p}]+3}T < \frac{1}{6};C_2\eta < \frac{1}{6} \quad (36)$$

结合（35）、(36）式，可得

$$\|u^n\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}+\|u^n\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \leqslant C_2(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}}+\eta^2+2(1+A_0)^{[\frac{N}{p}]+3}\cdot \eta(T+\eta)+2\eta TH_0^2) < \frac{5}{6}\eta \quad (37)$$

最后令 $c_1=\frac{1}{2}\min(\inf_{|\rho|\leqslant(1+A_0)}\bar{\mu}(\rho),\inf_{|\rho|\leqslant(1+A_0)}\bar{\lambda}(\rho)+2\bar{\mu}(\rho))$。由（34)，(37)，(20）－（22)，(25）式可知，（A1）－（A4）式的左边严格小于右边。下面证明 $T_n \geqslant T^*$。

设 T^* 为所有使得（36)、（33)、（24）式成立的 T 的上确界。假设 $T_n < T^*$，我们可以证明

$$a^n \in L_{T_n}^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1});$$

$$u^n \in L_{T_n}^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}) \cap L_{T_n}^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2});$$

$$b^n \in L_{T_n}^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})$$

进而可知解（a^n,u^n,b^n）可延拓到 T^* 外。所以 $T_n \geqslant T^*$。

第三步：解的存在性。

由上一部分所做的估计，可知 $\{u^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 在 $L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1}) \cap L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})$ 中是一致有界的。利用插值公式，对任意 $q \in [1,\infty]$，有 $\{u^n\}_{n\in\mathbf{N}} \in L_T^q(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1+\frac{2}{q}})$。

考虑运输方程 $\partial_t a^n+u^n\cdot\nabla a^n=-(1+a^n)\mathrm{div}u^n$，利用引理 1，可知

$$\|u^n\cdot\nabla a^n\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C\|u^n\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|a^n\|_{L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \quad (38)$$

$$\|(1+a^n)\mathrm{div}u^n\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C\|u^n\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|1+a^n\|_{L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \quad (39)$$

结合（38）式和（39）式，有 $\{\partial_t a^n\}_{n\in\mathbf{N}} \in L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})$。因此 $\{a^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 在 $\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})$ 上一致有界，并且在 $[0,T]$ 上是等度连续的，又因为 $\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} \to \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}$ 是局部紧嵌入，$(a_0^n)_{n\in\mathbf{N}} \in \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}$，所以 $(a^n)_{n\in\mathbf{N}} \to a \in \tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})$，即 $a \in \tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})$。

接下来，我们考虑磁场方程 $\partial_t b^n+u^n\cdot\nabla b^n=b^n\cdot\nabla u^n-\mathrm{div}u^n\cdot b^n$。利用引理 4，可得如下估计

$$\|u^n\cdot\nabla b^n\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C\|u^n\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|\nabla b^n\|_{L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C\|u^n\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|b^n\|_{L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})},$$

$$\|b^n\cdot\nabla u^n\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C\|u^n\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|b^n\|_{L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})},$$

$$\|\mathrm{div}u^n\cdot b^n\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leqslant C\|u^n\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}\|b^n\|_{L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}$$

同理易证 $\{\partial_t b^n\}_{n\in\mathbf{N}} \in L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})$。用上述相类似方法，$(b^n)_{n\in\mathbf{N}} \to b \in \tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})$。

下面讨论 $\{u^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 的收敛性。考虑磁流体方程组（2）的动量方程，利用引理 4，可得

$$\|u^n\cdot\nabla u^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-\frac{3}{2}}} \leqslant C\|u^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}}\|u^n\|_{L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+\frac{1}{2}})} \quad (40)$$

$$\|(1+a^n)\nabla P(\rho^n)\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}} \leqslant C(1+\|a^n\|_{L^\infty})^{[\frac{N}{p}]+2}\cdot (1+\|a^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}})\|a^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}\|u^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+\frac{1}{2}}} \quad (41)$$

$$\|\mathrm{div}(\bar{\mu}^n\nabla u^n)\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-\frac{3}{2}}}+\|\nabla(\bar{\lambda}^n+\bar{\mu}^n)\mathrm{div}u^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-\frac{3}{2}}} \leqslant C(1+\|a^n\|_{L^\infty})^{[\frac{N}{p}]+2}\cdot (1+\|a^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}})\|a^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}\|u^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+\frac{1}{2}}} \quad (42)$$

$$\left\|\frac{\mu(\rho^n)}{(\rho^n)^2}\nabla\rho^n\cdot\nabla u^n\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-\frac{3}{2}}} \leqslant C(1+\|a^n\|_{L^\infty})^{[\frac{N}{p}]+2}\cdot (1+\|a^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}})\|a^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}\|u^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+\frac{1}{2}}} \quad (43)$$

$$\left\|\frac{\mu(\rho^n)+\lambda(\rho^n)}{(\rho^n)^2}\nabla\rho^n\cdot\mathrm{div}u^n\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-\frac{3}{2}}} \leqslant C(1+\|a^n\|_{L^\infty})^{[\frac{N}{p}]+2}(1+\|a^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}})\|u^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+\frac{1}{2}}},$$

$$\|M^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-\frac{3}{2}}} \leqslant C(1+\|a^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}})\|b^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}\|b^n\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+\frac{1}{2}}} \quad (44)$$

由（40）-（44）式，可知 $\{\partial_t u^n\}_{n\in\mathbf{N}} \in L_T^{\frac{4}{3}}(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-\frac{3}{2}})$。

因为 $\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-\frac{3}{2}} \to \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-\frac{3}{2}}$ 是局部紧嵌入，所以 $u^n \to u \in \tilde{L}_T^{\infty}(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}), n \to \infty$。

又 $u \in L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})$，所以可以得到 $u \in \tilde{L}_T^{\infty}(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}) \cap L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})$。

利用命题 1 与命题 4，可知解 (a,u,b) 关于时间 t 也是连续的。所以有

$$(a^n,u^n,b^n)_{n\in\mathbf{N}} \to (a,u,b) \in \tilde{L}_T^{\infty}(\dot{B}_{P,1}^{\frac{N}{p}}) \times (\tilde{L}_T^{\infty}(\dot{B}_{P,1}^{\frac{N}{p}-1}) \cap \tilde{L}_T^1(\dot{B}_{P,1}^{\frac{N}{p}+1}))^N \times \tilde{L}_T^{\infty}(\dot{B}_{P,1}^{\frac{N}{p}} \cap \dot{B}_{P,1}^{\frac{N}{p}-1})^N$$

由此可得

$$(a,u,b)\in C([0,T];\dot{B}_{P,1}^{\frac{N}{p}}) \times (C([0,T];\dot{B}_{P,1}^{\frac{N}{p}-1}) \cap L^1(0,T;\dot{B}_{P,1}^{\frac{N}{p}+1}))^N \times (C([0,T];\dot{B}_{P,1}^{\frac{N}{p}} \cap \dot{B}_{P,1}^{\frac{N}{p}-1})^N$$

参考文献：

[1] GERBEAU J F, LEBRIS C. Existence of solution for a density-dependent magnetohydrodynamic equation [J]. Adv Differential Equations, 1998, 2(3): 427 -452.

[2] DESJARDINS B, LEBRIS C. Remarks on a nonhomogeneous model of magnetohydrodynamics [J]. Differential and Integral Equations, 1998, 11(3): 377 -394.

[3] ABIDI H, HMIDI T. Résultats d'existence dans des espaces critiques pour le système de la MHD inhomogène [J]. Ann Math Blaise Pascal, 2007, 14: 103 -148.

[4] ABIDI H, PAICU M. Global existence for the MHD system in critical spaces [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2008, 138: 447 -476.

[5] HU X P, WANG D H. Global existence and large-time behavior of solutions to the three-dimensional equations of compressible magnetohydrodynamic flows [J]. Arch Ration Mech Anal, 2010, 197: 203 -238.

[6] LU M, DU Y, YAO Z A. Blow-up criterion for compressible MHD equations [J]. J Math Anal Appl, 2011, 379: 425 -438.

[7] BIAN D F, YUAN B Q. Well-posedness in super critical Besov spaces for the compressible MHD equations [J]. International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations, 2011, 3: 383 -399.

[8] DANCHIN R. Local theory in critical spaces for compressible viscous and heat-conductive Gases [J]. Comm Partial Differential Equations, 2001, 26: 1183 -1233.

[9] DANCHIN R. Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations [J]. Invent Math, 2000, 141: 579 -614.

[10] DANCHIN R. On the uniqueness in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations [J]. Nonlinear Differential Equations Appl, 2005, 12: 111 -128.

[11] HASPOT B. Well-posedness in critical spaces for the system of Navier-Stokes compressible [J]. ARXIV : 0904.1354, 2009.

[12] CHEN Q L, MIAO C X, ZHANG Z F. Well-posedness in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities [J]. Rev Mat Iberoamericana, 2010, 26(3): 915 -946.

[13] FUJITA H, KATO T. On the Navier-Stokes initial value problem I [J]. Arch Rational Mech Anal, 1964, 16: 269 -315.

[14] CHEMIN J Y. Perfect incompressible fluids [M]. New York: Oxford University Press, 1998.

[15] 原保全. Boussinesq 方程组在 Besov 空间中局部解的存在性和延拓准则[J]. 数学学报, 2010, 53(3): 455 -468.

[16] BONY J M. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équation aux dérivées partielles non linéaires [J]. Ann Sci École Norm Sup, 1981, 14(2): 209 -246.

[17] CHEMIN J Y. Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel [J]. J d´Analyse Math, 1997, 77: 27 -50.

[18] DANCHIN R. Well-posedness in critical spaces for barotropic viscous fluids with truly not constant density [J]. Comm Partial Differential Equations, 2007, 32: 1373 -1397.